

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Введение в современную алгебру
по направлению:	Фотоника и оптоинформатика
профиль подготовки:	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 1 (осенний) - Зачет
- 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

- лекции: 60 час.
- семинары: 60 час.
- лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составил: И.В. Каржеманов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Физтех-кластера академической и научной карьеры 20.05.2024

Аннотация

Данный курс посвящен основным понятиям и методам в современной алгебре. В него включено много практической работы, в том числе самостоятельной, для усвоения материала.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Научить студентов языку и технике современной высшей алгебры, дать примеры ее применений в геометрии, физике и других науках.

Задачи дисциплины

Научить студентов пользоваться языком и техникой теории групп и их представлений, равно как теории колец и модулей, а также способам вычислений их простейших гомологических инвариантов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области фотоники и оптоинформатики
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач в области фотоники и оптоинформатики
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований в области фотоники и оптоинформатики к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен самостоятельно или в составе научного коллектива планировать и проводить научные исследования в области фотоники и оптоинформатики
---	--

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основы теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

уметь:

- определять структуру конечных групп, находить их представления, и то же для полупростых колец.

владеть:

- языком и техникой теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Определение группы	3	3		3
2	Орбиты	3	3		3
3	Нормальные группы	4	4		4
4	Вторая и третья теорема о гоморфизме	4	4		4
5	Вторая и третья теоремы Силова	4	4		4
6	Строение конечнопорожденных абелевых групп.	4	4		4
7	Коммутант и разрешимые группы	4	4		4
8	Неразрешимость групп S_n и A_n	4	4		4
9	Представления конечных групп. Теоремы Машке и Шура. Примеры.	4	4		6
10	Характеры представлений	4	4		6
11	Коммутативные кольца и идеалы (предварительные сведения)	4	4		6
12	Существование максимального идеала	4	4		6
13	Делители нуля и локализация	4	4		7
14	Нетеровы кольца	5	5		7
15	Кольца главных идеалов	5	5		7
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Определение группы

Определение группы и действия группы на множестве. Примеры.

2. Орбиты

Орбиты, стабилизатор, теорема Лагранжа. Примеры

3. Нормальные группы

Нормальные группы. Первая теорема о гомоморфизме. Примеры

4. Вторая и третья теорема о гомоморфизме

Вторая и третья теорема о гомоморфизме. Первая теорема Силова

5. Вторая и третья теоремы Силова

Вторая и третья теоремы Силова. Приложения к строению конечных групп. p -группы.

6. Строение конечнопорожденных абелевых групп.

Строение конечнопорожденных абелевых групп. Примеры вычисления.

7. Коммутант и разрешимые группы

Коммутант и разрешимые группы. Основные свойства и теоремы. Примеры.

8. Неразрешимость групп S_n и A_n

Неразрешимость групп S_n и A_n . Приложения к решению уравнений в радикалах.

Семестр: 2 (Весенний)

9. Представления конечных групп. Теоремы Машке и Шура. Примеры.

Представления конечных групп. Теоремы Машке и Шура. Примеры.

10. Характеры представлений

Характеры представлений. Соотношение ортогональности и следствия из нее (теорема Бернсайда и делимость степеней представлений). Примеры.

11. Коммутативные кольца и идеалы (предварительные сведения)

Коммутативные кольца и идеалы (предварительные сведения). Теоремы о гомоморфизме. Построения колец. Примеры.

12. Существование максимального идеала

Существование максимального идеала. Теорема Гильберта о нулях. Примеры.

13. Делители нуля и локализация

Делители нуля и локализация. Примеры и приложения.

14. Нетеровы кольца

Нетеровы кольца. Теорема Гильберта. Примеры и приложения.

15. Кольца главных идеалов

Кольца главных идеалов. Теорема о факториальности. Примеры.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, при необходимости медиапроектор, экран.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Категории для работающего математика [Текст]/С. Маклейн, -М., Физматлит, 2004
2. Гомология [Текст], монография/С. Маклейн, -М., Мир, 1966
3. Алгебраическая топология и теория пучков [Текст], монография/Р. Годеман, -М., Изд-во иностр. лит., 1961

Дополнительная литература

1. Когомологии групп [Текст]/К. С. Браун, -М., Наука, 1987
2. С.И. Гельфанд, Ю.И. Манин. Методы гомологической алгебры. Том I. - М.: Наука, 1988
3. С.М. Львовский. Введение в когомологии пучков. - М.: МЦНМО, 2000

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

А.В. Ершов Функторные морфизмы <http://window.edu.ru/resource/166/77166>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Яндекс.Телемост, МТС-Линк

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Фотоника и оптоинформатика
профиль подготовки:	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры (Современная фундаментальная математика)
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
	1 (осенний) - Зачет
	2 (весенний) - Экзамен
Разработчик:	И.В. Каржеманов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области фотоники и оптоинформатики
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач в области фотоники и оптоинформатики
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований в области фотоники и оптоинформатики к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен самостоятельно или в составе научного коллектива планировать и проводить научные исследования в области фотоники и оптоинформатики

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в современную алгебру» обучающийся должен:

знать:

- основы теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

уметь:

- определять структуру конечных групп, находить их представления, и то же для полупростых колец.

владеть:

- языком и техникой теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Докажите, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.
2. Найдите левый сопряженный к функтору из категории ассоциативных k -алгебр с единицей в категорию векторных пространств над k , забывающему умножение.
3. Пусть $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ – точная последовательность комплексов. Покажите, что комплекс M квазиизоморфен конусу $C(i)$.
4. Пусть G – группа, A – G -модуль. Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности расширений группы G при помощи A , индуцирующих данное действие группы G в A и множеством $H^2(G, A)$.
5. Докажите факториальность кольца главных идеалов.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов

9 семестр:

1. Докажите, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.
2. Найдите левый сопряженный к функтору из категории ассоциативных k -алгебр с единицей в категорию векторных пространств над k , забывающему умножение.
3. Пусть $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ – точная последовательность комплексов. Покажите, что комплекс M квазиизоморфен конусу $C(i)$.
4. Пусть G – группа, A – G -модуль. Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности расширений группы G при помощи A , индуцирующих данное действие группы G в A и множеством $H^2(G, A)$.
5. Докажите факториальность кольца главных идеалов.
6. Дать определения орбит, стабилизатора. Доказать теорему Лагранжа.
7. Доказать первую теорему о гомоморфизме и привести пример её применения.
8. Доказать вторую и третью теоремы о гомоморфизме.
9. Доказать первую теорему Силова.
10. Доказать вторую и третью теоремы Силова.

10 семестр:

1. Теоремы Машке и Шура о представлениях конечных групп.
2. Соотношение ортогональности и следствия из нее (теорема Бернсайда и делимость степеней представлений). Доказать теорему, привести примеры применения.
3. Сформулировать и доказать теорему Гильберта о нулях.
4. Теоремы о гомоморфизме. Построения колец. Примеры.
5. Сформулировать и доказать лемму Нетер о нормализации.
6. Делители нуля и локализация. Примеры и приложения.
7. Кольца главных идеалов.
8. Теорема о факториальности. Примеры.
9. Строение конечнопорожденных абелевых групп. Примеры вычисления.
10. Коммутант и разрешимые группы. Основные свойства и теоремы.

Пример задания на зачет:

1. Доказать первую теорему Силова.
2. Пусть G – группа, A – G -модуль. Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности расширений группы G при помощи A , индуцирующих данное действие группы G в A и множеством $H^2(G, A)$.
3. Докажите факториальность кольца главных идеалов.

Примеры экзаменационных билетов

Билет 1.

1. Докажите, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.

2. Пусть GG – группа, AA – GG -модуль. Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности расширений группы GG при помощи AA , индуцирующих данное действие группы GG в AA и множеством $H^2(G, A)$.

Билет 2.

1. Найдите левый сопряженный к функтору из категории ассоциативных k -алгебр с единицей в категорию векторных пространств над k , забывающему умножение.

2. Докажите факториальность кольца главных идеалов.

Критерии оценивания

Зачёт: обучающемуся ставится зачет в соответствии с продемонстрированным уровнем подготовки; оценивание производится на усмотрение преподавателя в соответствии с особенностями дисциплины и следующими критериями:

Оценка "зачтено" - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике.

Оценка "не зачтено" - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Экзамен:

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Промежуточная аттестация по дисциплине «Введение в современную алгебру» осуществляется в форме контрольной работы. Контрольная работа проводится в письменной форме.

Экзамен проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.